発達段階に応じた数学における自己表現力の育成

浜　口　国　彦
数学科　松　原　敏　治
戸　水　吉　信

1．テーマ設定にあたって

今年度，本校では「共に学ぶ生徒の育成を目指して～コミュニケーション力を高める実践研究～」をテーマに研究を進めているが，数学的なコミュニケーション力を育てるには，まず，自分の考えを数学的に表現する力（＝数学における自己表現力）の育成が必要不可欠であると考えた。

しかし，“数学における自己表現力”といっても，様々な場合があり，生徒の学習の到達度や発達段階に応じてそれらの目標を設定したり指導したりする必要があるのではないだろうか。本校の研究においても，一昨年度から，生徒の「発達段階」について研究がなされるようになったが，数学科においても，生徒一人一人にはそれぞれの発達段階があり，それに応じた課題を与えることが必要ではないか，と考えるようになった。そして数学科においては生徒の発達段階を，特に数学的な思考水準に絞って考察し，それに応じた指導のあり方について研究をすすめてきた。

以下は，ここ2年間で研究をすすめ，金沢大学の大谷教授に指導を受け，本校数学科で考えてみた各領域における思考水準である。今年度は，これらの思考水準をもとに生徒の発達段階を考え，それに応じて表現力を伸ばす指導を行っていきたい。加えて，実践をすすめる中で，これらの思考水準にも訂正を加えながら，より生徒の実態に応じた指導を目指していきたい。そうすることによって，個々に応じた数学における自己表現力を伸ばすことができ，数学的なコミュニケーション力の育成につながっていくのではないだろうか。

(1)　ファン・ヒーレの幾何学における思考水準論より
（本校「図形」領域における思考水準も同じものを使用）

第0水準　図形は「全体として」認識され，その形によってだけ認識されるという特徴をもつ。

第1水準　この水準では，知覚される形の分析が行われ，その結果，それらの性質が明らかにされる。子どもは，図形の形に潜在する性質を認識し始める。

第2水準　この水準では，図形の諸性質間の論理的な関係や，図形間の論理的な関係づけがなされる。たくさんある性質の中で二三の特徴的性質が当該の図形を定義するものとして採用され，あとの性質は論理的な方法で確立される。図形は，定義に基づいて確立される一定の論理的な関連において現れる。

第3水準　この水準では，演繹法の意味が「大域的に」会得される。すなわち，理論全体を構成し，発展させる方法としての演繹法の意味が理解される。ここでは，「演繹の意味や，定理の逆，公理，必要・十分条件の認識に関連している。

第4水準　最も高いこの水準は，論理の本性についての認識である。ここでは，対象の具体的性質や対象間の関係の具体的な意味が捨象される。すなわち，理論をあらゆる具体的な解釈をぬきにして展開することができる。

(2)　本校数学科における「数と式」領域における思考水準

第0水準　具体的な物を使っての計算しかできない。（小学校低学年）

第１水準　具体的な物を使っての計算から,「数字」での機械的操作による計算ができる。（小学校低学年～高学年）

第２水準　いろいろな法則を見つけ，それを具体的な事象に照らすなどして，一般的に成り立つことが説明できる。（中学校１学年～中学校２学年）

第３水準　いろいろな数の定義を理解し，定義から計算法則などの公式･定理を導き出し，新たな公式･定理の証明ができる。また，必要に応じて数の場合分けをして，数学的な議論をすすめることができる。（中学校３年生～高校生）

第４水準　数や文字式の集合を環や体としてとらえることができ，定義・定理を集合そのものに適応することが出来る。（大学生）

(3)　本校数学科における「関数」領域における思考水準

第０水準　変化と対応について感覚的に理解する（伴って変化する数量を漠然ととらえる）（小４まで）

第１水準　変化と対応について成り立つ諸性質（属性）を見出す（比例であれば「一方が○倍になるとそれに伴って他方も○倍になる」など)。一般的な関数でなく，比例や反比例といった特定に関数の性質を知る。

具体的には実験・実測・操作活動などの体験的な方法を通じて，数表やグラフにより関係をとらえたり，変化の様子を具体的な事象によって考察できる。（小５から中１まで）

第２水準　特定の関数について局所的に論理的な系統化がなされる。変化と対応について成り立つ諸性質（属性）の中で定義（特性）（中学校の場合は式）が優先され，それに基づき関数他の属性を演繹的に導く。また，関数という一般的な用語を使う（その概念自体を考察の対象としない）具体的には関数関係を理解し，式によって一般的に関数をとらたり，変化の様子を一般的に考察できる。（中１から中３）

第３水準　関数の概念が理解でき，一段高い視点から関数族を考察する。（中３から高３）

第４水準　抽象的な関数空間（Banach, Hilbert 空間など）を考察する。（高３から大学生）

２．研究の方針

(1)　生徒の思考水準を考慮し，各領域における表現力の目標と学習活動のあり方を考える

①　数と式領域

学　年	表　現　力　の　目　標	学　習　活　動
第１学年	文字を使って事象を一般的に表す （第１水準から第２水準へ）	具体的な事象を多く取り上げる
第２学年	文字を使って一般的な法則を見つけて説明する （第２水準）	・式の計算による 一般化 ・式を用いた説明
第３学年	仮定と結論を区別し，条件によって場合分けができ， 成り立つ場合を説明できる （第２水準から第３水準へ）	一般的・抽象的な証明 条件による場合分け

② 図形領域

学　年	表　現　力　の　目　標	学　習　活　動
第１学年	数学的な事象を図（平面図，見取図）や言葉で具体的に説明できる（第１水準から第２水準へ） 図や言葉には，図形の性質のような数学的な意味合いが含まれる	具体的な事象を多く取り上げる ・作図 ・見取図 ・操作による説明
第２学年	数学的な性質を数学の言葉を用いて一般的に説明することができる（第２水準） 図は言葉による説明の補助に使われるが，図は必ずしも正確でなくてもそれが正しいことが論理的に認識される	・図や言葉を用いた説明 ・証明
第３学年	仮定と結論を区別し，条件によって場合分けができ，成り立つ場合を説明できる （第２水準から第３水準へ）	一般的・抽象的な証明 条件による場合分け

⑵ 表現の場の設定

考えたことを発表する場の設定や，小グループでの活動を取り入れることで，各自が自分の考えを表現できる場を増やしていくことにした。また，生徒が自分達の考えを表現したものを，全体発表会を開いて全員で確認したり，グループごとに紙にまとめて掲示したり，ノートやレポートに自分の考えを表現したものをプリントにしたりと，様々な形で生徒自身にフィードバックしていくことにした。

⑶ 数学的な表現活動を主体とした異学年交流を行う

さらに，１年必修と３年必修，２年必修と３年選択などの組み合わせで，異学年同士で自分の考えを表現しあう，異学年交流を行うこととした。下の学年にとっては，上の学年の考え方を聞くことで，思考水準がのびるきっかけとなることが期待でき，上の学年にとっては，下の学年に教えることで，今の思考水準の確認ができ，思考水準が伸びる基礎をつくることができると考えた。

参考文献　ファン・ヒーレ夫妻（van Hiele, P. M. & van Hiele Geldof）ファン・ヒーレの思考水準論
磯田正美「関数領域のカリキュラム開発の課題と展望」

3．今年度の１学年の実践

(1)　ねらい

思考水準からすると中学１年生の段階では第１水準「具体的な物を使っての計算から，数字での機械的操作による計算ができる。」にとどまっている生徒と第２水準「いろいろな法則を見つけ，それを具体的な事象に照らすなどして，一般的に成り立つことが説明できる。」に達している生徒が混在している状態だと考えられる。特に４月から６月では第１水準の生徒がほとんど大部分を占めていると考えれる。そこで，１年生の初めでは操作的活動や具体的な事象を多く取り上げて意欲の向上に努めたい。また，具体的な事象や数量を多く取り上げることで具体的な数を用いた説明から文字を用いた一般的な表現や説明ができる素地になると思う。授業では「課題の設定」「個人追求」「グループ追求」「生徒の同士の話し合い」「発表や意見交換」の場面を設定して各自が考えた内容を発表したり，生徒同士で話し合ったりするようにする。自分の考えをノートなどに数学的に表現する。それを発表したり話し合いたりすると各自の考えが整理されたり，他者の考えから学び自分の考えを深めることになる。自分が考えたことを他者に伝えるときには他者を納得させる力がいる。このとき他者にも伝わる共通した数学的な表現力が必要になる。この表現力も思考水準に影響されている。同じ思考水準なら共通な数学的な表現で各自の考えが相手に伝わり納得させることができる。また，話し合いも高まり各自の理解も深まる。このようなことから中学１年生なりの筋道の立った考え方や表現力を伸ばしていきたい。「数と式」では数学的な形式の整った表現としては正負の数，文字式，方程式などになる。はじめは形式にとらわれない表現で論理的に説明しながら次第に数学的に整った形式で表現して説明できるようにしたい。

(2)　学習活動について

事例１　正負の数

①　課題

身の回りで正負の数で表すことができる数量を見つけよう。そのとき０になる量は何か考えてみよう。

②　ねらい

正負の数で温度を表現する学習後に，この課題を取り扱う。正負の数で表現できる様々な数量が身の回りある。正負の数で表現すると反対の性質を持つ量を表現したり基準からの差，数量の増減関係や変化が明確になることを理解する。さらに，数量を正負の数で表現することで他者との共通な見方や表現ができるようになりお互いの話し合いや課題追求が進むようになる。

また，自分の気がつかない数量を知ることで身の回りの数量に対する理解が深まり文字による一般化の土台になると考えれる。

③　学習形式

班活動で「身の回りで正負の数で表現できる数量にはどんなものがあるか。」「正負の数で表現することが妥当かや０はどんな量になるか。」「さらに正負の数で表現することでどんなよさがあるか。」につて話し合う。

④　生徒の発表例

(標高と水深)　　海面が０ｍで標高3000ｍは＋3000ｍで水深が200ｍが－200ｍである。

(海抜)　　前日の海面が基準の０でそれより上がれば＋で下がればーになる。

(株価)　　前日が株価が基準の０でそれより上がれば＋でそれより下がればーで表す。

(過去と未来)　　現在が０分　過去がー５分で未来が＋７分などになる。

（身長や体重）　前との比較で現在の体重を基準の０としてそこから体重が３kg増えれば＋３kgで体重が４kg減れば－４kgとなる。平均との比較は平均を基準の０として平均との差プラスかマイナスかで決まる。

（点数）　平均点との比較は平均を基準の０として平均との差プラスかマイナスかで決まる。

（収入と支出）　今の持っているお金を基準の０として収入が＋で支出が－になる。

その他として　（ゴルフのスコア）（利益）（人口）などが発表された。

個人で考えるより班活動では多くの事例が発表された。また，０の意味や正負の数で表現する良さを話し合うことで身の回りには正負の数で表現できる数量が数多くあることがわかったようである。正負の数の大切さも理解できたようである。更に，反対の性質をもつ量の表現や数量の増減や変化について説明することも容易にできたようである。

事例２　等式と方程式

①　課題

次の等式は方程式か考えてみよう。

４ｘ＋３＝15　　４（ｘ－１）＝４ｘ－４　　Ｌ＝４ａ　　４ｘ＝ｘ

②　ねらい

方程式の意味を学習した後に方程式と恒等式の違いについて考える。「方程式は特定な値についてのみ等式が成り立ち，恒等式はどんな値についても等式が成り立つ。」このことを学習することで方程式の意味の理解を深めることができると思う。等式や代入するなどの数学的な表現を用いて，この理由を考え話し合うことになる。

③　学習形式

はじめはこれらの等式が方程式かどうか個人追求で考える。その後に小グループで各等式が方程式かそうでないかの理由を話し合う。話し合った結果を発表し意見交換をおこなう。

④　生徒の発表例

４ｘ＋３＝15ではｘ＝３を代入すると左辺と右辺の値が等しくなる。また，ｘ＝２なら左辺と右辺の値が等しくない。ｘ＝３のときだけ等式が成り立つから方程式である。このようにはじめの導入通りに考え結論づけている。

４（ｘ－１）＝４ｘ－４ではｘ＝1，２，３，４・・・・とどんな数を代入しても等式は成り立つから方程式ではない。具体的な例を多くあげて説明している。ただ，この説明は具体的な数を多くあげていつでも成り立つと説明している。思考水準としては第１水準から 第２水準へと移行しつつある段階と思われる。多くの生徒がこのような説明で納得していたようである。ただ，この違いを十分に把握してしない生徒もいた。

Ｌ＝４ａは文字式では公式として指導してあったこともあり，と生徒は今の段階では方程式と考えないようである。その理由としては「ａの値でＬの値が決まるのでもａがどんな値でも成り立つ。」「文字が１つでなく２つもある。」などをあげた。また，問いの意味がよくわからない生徒もかなりいた。思考水準から少し無理な課題だった。

４ｘ＝ｘはかなり迷っていたようである。方程式の解き方を学んだ段階であれば，４ｘ－ｘ＝０　３ｘ＝０　よってｘ＝０と解がｘ＝０と分かる。ｘ＝０を代入することになかなか気づかなかった。０を数としてとらえないで何もないという見方をまだもっているためのようである。

４．今年度の２学年の実践

見取図の授業

⑴　実践研究の概要

見取図は空間図形学習におけるコミュニケーションツールである。しかし，見取図ではしばしば「図の見えにだまされる」ということがおこる。たとえば，図１で切り口の三角形が直角三角形であると勘違いするような間違いである。

いわば空間図形を平面に表現するための文法が身に付いていない。

その原因としては見取図をかく経験が少ないことがすぐに指摘されるが，それ以外に，

・立体を構造的にとらえる習慣がついていない。

・様々な視点から見た見取図をかくことができない。

という２点もかなり原因として大きいと思われる。

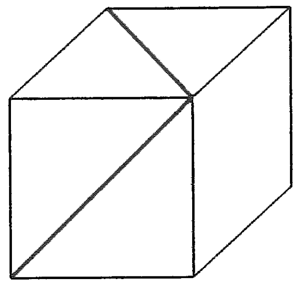


図１

これに対し，次のような指導を行うことを考えた。

①　立体の動的な見方をすることによって，柱の構造をとらえる

②　平行投影図のかき方を指導する

これらの指導をすることによって，様々な視点から見た見取図がかけるようになり，図の見えにだまされる生徒が減ると考える。

⑵　見取図の指導の授業デザイン

①　立体の動的な見方

現在，中学１年の空間図形の単元の中に「立体のいろいろな見方」として，「角柱や円柱は，底面がそれと垂直な方向に動いてできた立体とも考えられる。底面の周の動いたあとは，その立体の側面であり，動いた距離が高さである。」という記述が教科書にあり，それに付随して次のような図がかかれている。（図２）

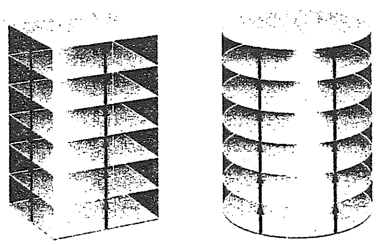


図２

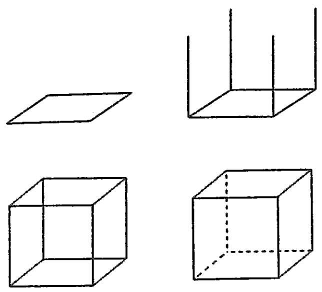


図３

この見方が柱というものの構造を表しているととらえ，この構造にそって柱の見取図をかくことが考えられる。

具体的には，まず，底面となる平面図形を斜めから見た図をまずかかせる。次に側面の辺をかかせ，最後に上の底面をかく，というかき方である。（図３）このように指導することによって，見取図のかき方の学習が，空間図形の性質を理解する手立てとなりうると考えられる。

②　平行投影図のかき方を指導する

中学校数学科においては，見取図の指導で，立体の平行線は見取図でも平行線としてかくことや，立体の同方向の等しい長さの線分は見取図上でも等しい長さの線分としてかく，という平行投影図の

約束にまでふみこんでの指導は普通行われていない。

しかし，自由に見取図をかけるという自信を持たせるためには平行投影図の指導は有効であると考え，この実践研究の中で取り上げることとした。

実験授業は2006年６月に附属中学校２年選択数学受講者16名を対象に行った。

(4) 実験授業の実際の流れ

① 事前調査

見取図の指導は，ともすれば手本と同じような図がかければそれで見取図について理解できているとみなされがちである。しかし，久米・村上（1997）が述べるように，「数学教育における見取図は子どもが立体図形との関連を理解した図でなければならない。見取図と立体図形との関連とは，見取図の中に保存された立体図形の性質・関係のことである」

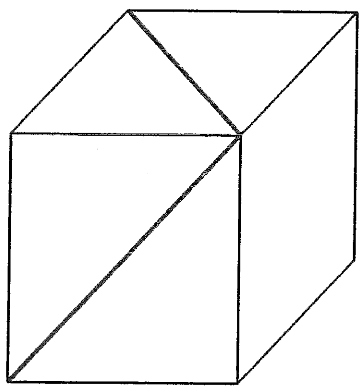
次にあげるような，立体の切断面の形を問う問題は，見取図の中に保存される性質，保存されない性質を考察する必要がある。また，見取図から平面図形をイメージする必要がある。

この問題を用いて見取図を読む力について調査することにした。（資料１）

資料１

問　次の図はすべて立方体の見取図です。図に太線を入れたようにこれらの立方体を平面で切ると，切り口は三角形になります。実際の切り口の三角形についてあてはまると思う文章の記号を答えなさい。（２つあてはまるものがあるときは両方の記号を書く）

(1)

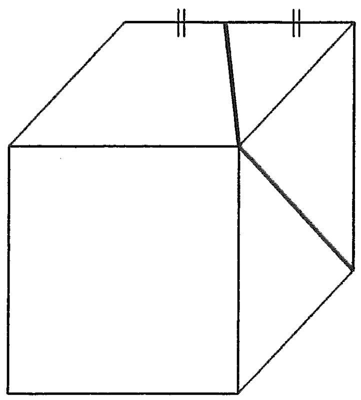


① 切り口の三角形で最も大きい角は
　ア．90度より小さい。（鋭角である）
　イ．90度である。（直角である）
　ウ．90度より大きい。（鈍角である）

② 切り口の三角形は
　ア．二等辺三角形である。
　イ．正三角形である。
　ウ．直角三角形である。
　エ．ふつうの三角形である。

答え　①	②

(2)



① 切り口の三角形で最も大きい角は
　ア．90度より小さい。（鋭角である）
　イ．90度である。（直角である）
　ウ．90度より大きい。（鈍角である）

② 切り口の三角形は
　ア．二等辺三角形である。
　イ．正三角形である。
　ウ．直角三角形である。
　エ．ふつうの三角形である。

答え　①	②

② 授業その１

ア．まず，２次元の正方形の模型をつくり，いろいろな場所からみた図をかかせる。

イ．次に，正方形の骨組みの４すみにそれぞれ柱を立てた空間図形を，いろいろな場所から見て，図をかかせる。

ウ．数学での見取図のかき方について共通理解を図る。

エ．共通理解のもとに次の順序で立方体の見取図をかかせる。

a　まず，立方体の底面を斜め上から見た図をかく

b　次に側面の辺を立てたところで続きの図をかく

c　最後に上の底面を完成させ最後の図をかく

本研究では，最初は底面の正方形だけ，次に側面の辺が観察できるような立体模型を用いることとした。

具体的には，等しい長さの細い金属の棒（１本10cm）とそれを組み合わせる部品（ジョイント）を用いた。

骨組みだけの模型を用いることで，立体の構造も理解しやすくなると考えた。

これによって底面だけ，底面と側面，全体，それぞれの図がかけるようになった。

③ 事後調査（事前調査と同一の問題）

④ 授業その２

事前事後調査の問題について，前もって別の場所から見た立方体の見取図を与え，共に考える。

(5) 分析と考察

① 事前調査

調査問題は前節であげたものである。

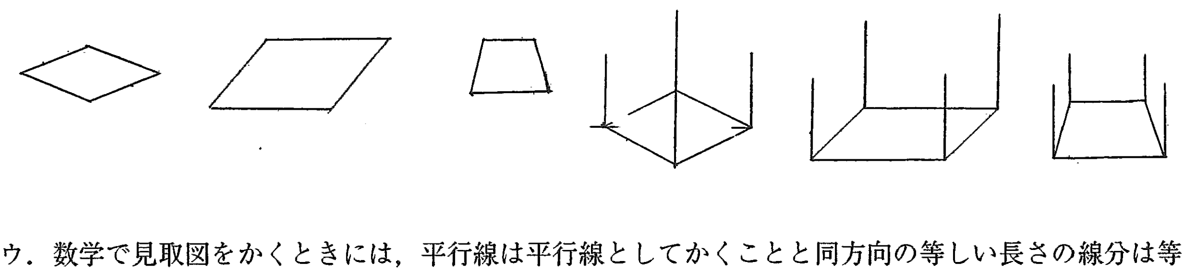
事前調査の結果，(1)の正解者は16人中10人，(2)の正解者は16人中２人，両方とも正解した生徒は16人中１人であった。(1)では直角三角形という誤答が，((2)では鈍角三角形という誤答が多かった。

② 授業その１

ア．この段階の図をかいている際には平行四辺形以外の形も出てきた。正方形を，正面斜め上から見ると台形になる，という発見をした生徒もいた。

イ．多くの生徒がアでかいた図をもとにしてイ図をかいていた。アとイの段階では平行投影図でなく，透視図的な図も出てきた。

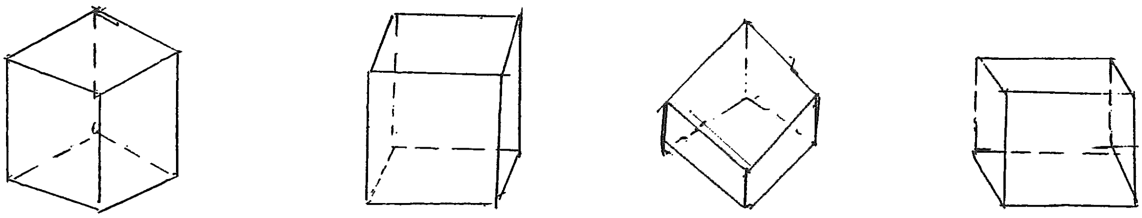
ア　　　　　　　　　　イ



ウ．数学で見取図をかくときには，平行線は平行線としてかくことと同方向の等しい長さの線分は等しい長さの線分にかくことを約束した。また，この約束から，立方体の見取図では，底面や側面の正方形は台形でなく平行四辺形（ひし形，正方形も含む）にかかなければならないことを確認した。

この手順で多くの生徒が見取図を何種類もかくことができるようになった。

その結果，一人で多くの見取図をかけるようになった。次の図は一人の生徒がかいた見取図である。



なお，この授業中，切断の問題にはまったく触れなかった。

③　事後調査

調査問題は事前調査と同一の問題である。

事後調査の結果，(1)の正解者は16人中10人（事前調査と人数変わらず），(2)の正解者は16人中７人（事前調査より６人増），両方とも正解した生徒は16人中７人（事前調査より６人増）であった。

このように，授業中切断の問題にはまったく触れなかったにもかかわらず，事後調査においては，(1)(2)の両方を正解した生徒が６名増えた。事前調査においても両方正解していた１人を除外して考えると，40％の生徒が，新たに両方とも正解となった。

正答率が上がった理由としては，見取図の約束を理解したため，見えにだまされなくなったことや，見取図をかく際に様々な場所から立方体を観察したので与えられた見取図とは別の場所から見たらどんな図になるか自分なりに考える習慣がついたこと，実際に別の場所から見た見取図をかいて考える生徒も出てきたことなどが考えられる。

④　授業その２

事後調査の問題について前もって別の場所から見た立方体の見取図を与え，共に考えた。生徒と個別にやり取りをしながら問題を考えさせたところ，最終的に(1)(2)について１人を除く全員が理解した。最後に，実際に立方体の見取図をかくときに使った模型を組み立て，太い輪ゴムをかけ，確かめをした。最後まで納得がいかないといっていた生徒は，実物模型を見て納得した。

(6)　まとめと今後の課題

今回，次のことがわかった。

①　立方体の見取図を，底面，側面，上の底面の順に模型を作りながら分析的に図をかいていく方法は分析的にみる見方が身についた，平行投影図をかく素地となったという２つの点で有効に機能した。

②　底面，側面，上の底面の順に平行投影図をかいていく方法を指導することによって生徒は様々な場所から見た見取図をかけるようになった。その結果，立体の切断面の形を考える問題の正答率が上がった。

今後の課題として次のことがあげられる。

①　見る場所の位置を変えた見取図をかく際，旧の図と新しい図で面の対応関係をすぐにつかめる生徒とそうでない生徒がいて，個人差が大きい。位置関係をすぐにつかめない生徒には丹念に指導する必要がある。

②　生徒は，見取図を「見たままをそのまま描いた図」と考えている。見取図は「見えをもとにして，一定の約束のもとにかく図」であることを納得させていく指導の方法を探る必要がある。

参考文献　久米康子・村上一三，1997「立体図形指導における見取図指導のあり方についての一考察」
第30回数学教育論文発表会論文集

5．３学年の実践

(1) つけたい表現力について

３学年においては，数学的なコミュニケーション力として，“自分の考えを人にわかりやすく数学的に伝える力の育成”をねらいとして，１学年時より指導を行ってきた。各学年の発達段階を考え，１学年では，“具体的な操作をともなった，口頭による説明”ができることをねらいとして，作図の指導を行った。２学年では，“図や色など，自分なりの工夫で考えをレポートにまとめる”ことができることをねらいとして，平面図形の指導を行った。そして３学年では，“様々な工夫を通して，人に自分の考えを分かりやすく伝える”ことができることをねらいとして，異学年交流授業を試みた。異学年交流において，３年生が１年生に自分の考えを分かりやすく伝えることができたかどうか，また，３年生と１年生がお互いの考えを述べあってどう数学的に議論するか，交流授業において検証していくことにした。

(2) 学習活動について

どの学年も，図形の性質を説明する活動を中心に授業実践を行うことにした。図形は具体的に性質が見えやすく，どの学年の発達段階でも扱いやすい領域であると考えた。また，そうすることによって，生徒の表現力がどのように抽象化されていくか，一貫して見ることができると考えた。

(3) 実際の授業実践

① １学年の授業実践

１学年の発達段階では，事象を数学的に考察するには，操作をともなったり，具体的な事象を扱うことが必要であると思われる。また，数学的な用語を使ったり，一般的に紙に自分の考えをまとめたりすることがまだ苦手な生徒もいると思われる。そこで，操作をともないながら，まずは話し言葉で自分の考えを伝えることができることを目指し，作図の指導において，実践を行うことにした。

授業では，生徒自身が作図の方法を，その方法が正しいことの理由も含めて考え，実際に作図を黒板で実演しながら，その方法が正しいことの説明を行う活動を行った。また，その説明の様子をビデオに撮り，それをビデオクリップ化して，サーバーに保存，データベース化した。(【資料１】参照)

説明することが苦手な生徒も，他の生徒の説明をもう一度見ることができるため，それを見ながら，作図の方法を理解し，自分なりの説明を考えることができるようになっていた。

② ２学年の授業実践

２学年の発達段階では，具体的な事象を扱いながら，それらを一般的，抽象的に扱っていくことが必要であると思われる。また，本格的に証明をかく活動が入ってくる。そこで，２学年では，身の周りの事象に数学的な性質を見いだし，それが正しいことを根拠を明らかにしながら分かりやすくレポートにまとめることを目指し，実践を行うことにした。

授業では，まず，内角の和や外角の和の性質をレポートにまとめさせた。生徒は図や色を効果的に用いて分かりやすいレポートを作成していた。これらのレポートはスキャナーで読み込んで，１学年のときと同様にデータベース化した。さらに，身の周りの図形において等しい角を探し，それをデジタルカメラで取材させた。見つけてきた等しい角を発表し，クラス全体で共有した上で，それらの角が等しいことの説明を考え，レポートにまとめた。(【資料２】参照)

レポートをデータベース化していくことで，他の生徒のレポートを参考にすることができる。また，

生徒は楽しんでデジタルカメラでの取材を行っており，身の周りの事象に数学を見いだす点で，生徒の学習意欲につながったと思われる。これらのことが，生徒が説明を考え，レポートにまとめる意欲につながったと思われる。

③　3学年の授業実践

3学年においては，1，2年時の実践をもとに，自分の考えを分かりやすく人に伝えることを目指し，異学年交流授業を，1年生と3年生が交流する形で行った。お互いの発達段階は違うが，特に3年生が，思考水準や知識の差を考慮して，いかに分かりやすく自分の考えを1年生に伝えることができるか見ていくことにした。1，2年時に図形領域で実践を行ったことを踏まえ，実際の具体的な図形の中に数学的な課題を見つけ，それについて考察していくことにした。

授業では，1，4，9，2，5といったある一定の面積をもつ正方形を方眼紙にかかせて，特に面積2や面積5の正方形の1辺の長さがどういう数であるか，異学年混合のグループで追求させた。グループの中でお互いの意見を述べ合い，グループ毎に意見をまとめて全体の場で発表し，全員で共有した。(【資料3】参照)

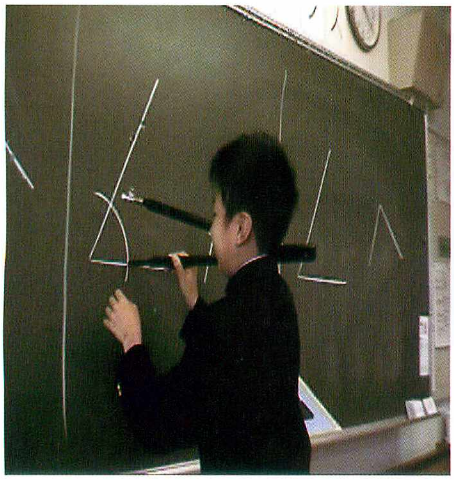
(4)　まとめと考察

生徒の様子を見ていると，1，2年時の実践が，生徒が自分の考えを分かりやすく表現しようという意欲につながったようである。生徒の考えをビデオクリップや静止画の形でデータベース化したことで，自分の考えがサーバーに保存され，いつでも他の人に見られるということになり，より分かりやすい説明を考えたり，分かりやすくレポートをかいたりしようという意欲につながったからであると思われる。また，データベースを活用する場面においては，その場で自然と相互評価が発生していた。すなわち，誰の説明が分かりやすいとか，レポートが見やすいとか，そういう話題が自然と発生するのである。その話はクラスを超え，学年全体でいいレポートが共有されることになる。そうすると，ますますいいレポートをかこうという意欲につながり，好循環を生み出していったのではないかと思われる。

しかし，確かにいいレポート，分かりやすいレポートをかこうという意欲にはつながっていったが，それが本当に数学的な表現力につながったかどうかについては，個人差があるように思う。多くの生徒は，他の人の考えやレポートを見ながら復習に役立てたり，自分の考えを深めたりすることはできたように思うが，レポートの中に数学的なよさを見いだせる思考水準に達してないと，それらのレポートを活かしきれないことがあったのではないだろうか。また，膨大な量のレポートを数学的にきちんと生徒にフィードバックできなかったことも，今後の課題である。

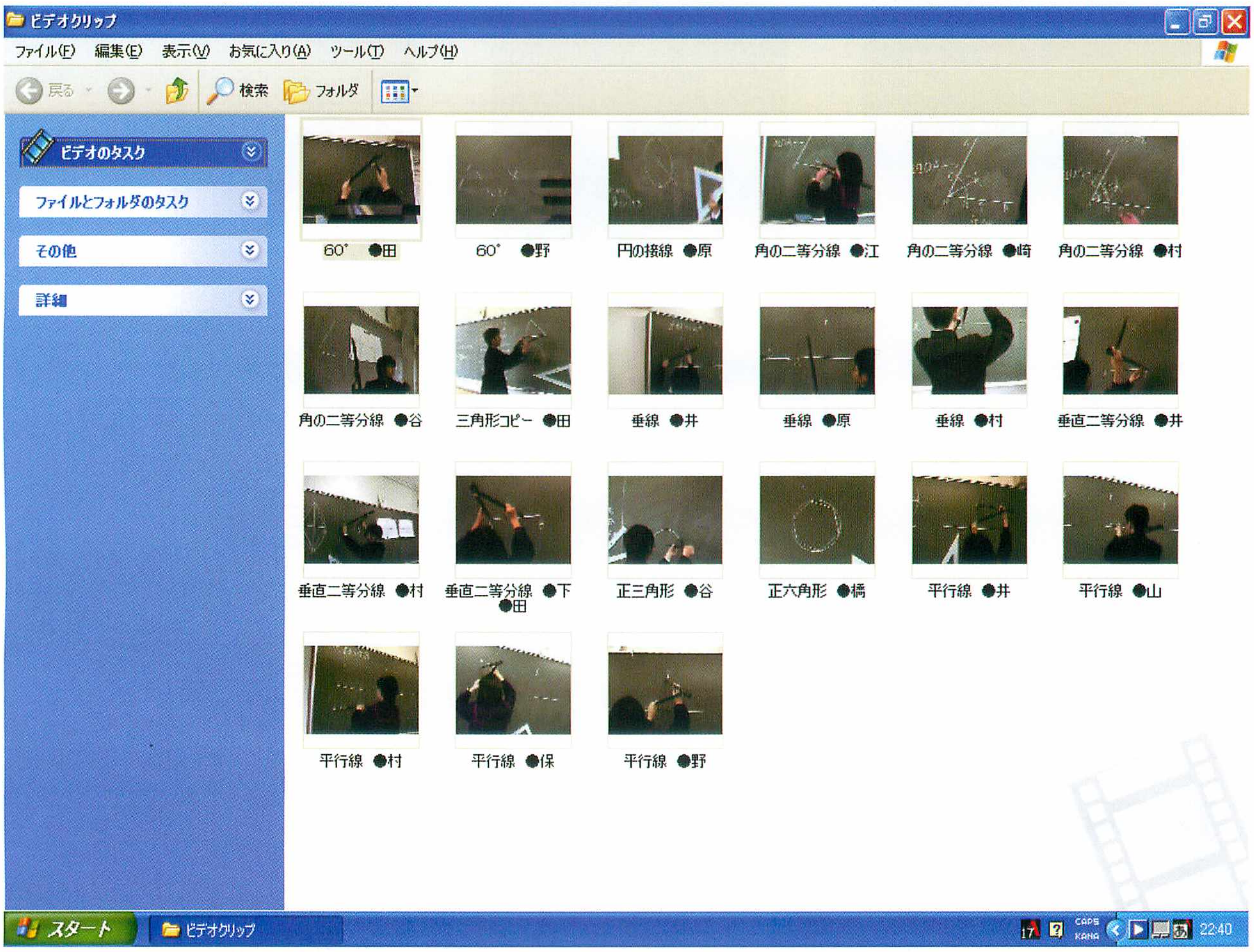
異学年交流については，まだ取り組みを始めたばかりで課題も多く，異学年で交流することの効果や意味をしっかりと考えて，ねらいを明確に位置づけていく必要がある。交流授業の授業整理会で，金沢大学の大谷教授から「思考水準が違うもの同士が同じ土俵で議論するのは難しい」との指摘をうけ，そのことを痛感している。確かに3年生は，自分たちの思考水準で議論をしており，自分たちのレベルの考えを1年生に何とか伝えようとしていたが，1年生の思考水準にあわせた議論を展開していた班はなかったのではないだろうか。その結果，1年生のレベルで考えたり追求したりすることのよさを失ってしまった感が否めない。数学科において，異学年交流をすすめていくことが，数学的なコミュニケーション力の育成につながるのかどうか，そのことも含めて今後の課題としたい。

【資料１】作図の授業で作成したビデオクリップ



←↑ビデオクリップの中の一場面

↓ビデオクリップをクラスごとにデータベース化したもの

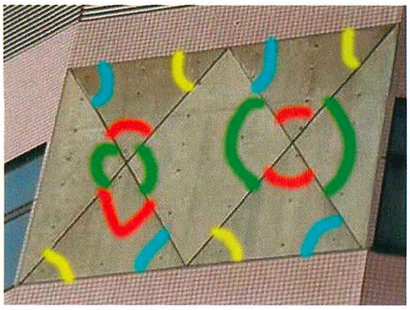


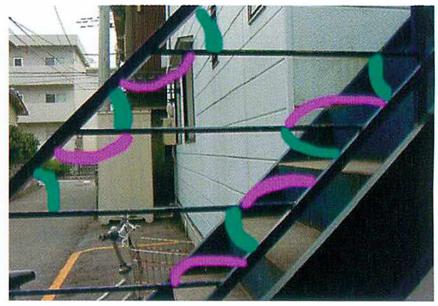
データベースに収録された作図一覧

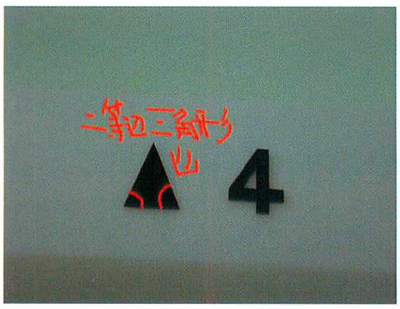
垂線の作図	１４	垂直二等分線の作図	7	角の二等分線の作図	１２
円の接線の作図	2	角の大きさの比較の作図	4	平行線の作図	5
三角形をコピーする作図	4	６０°の作図	2	正六角形の作図	5
正三角形の作図	1	コンパスを使った距離の説明	1		

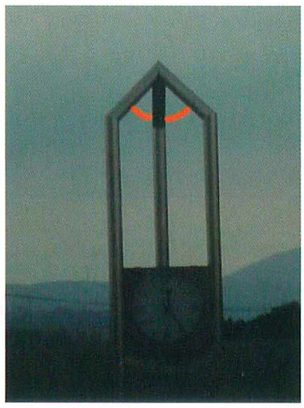
【資料２】平面図形の授業で生徒が作成したレポート

生徒が身の周りの等しい角を取材して，発表した写真

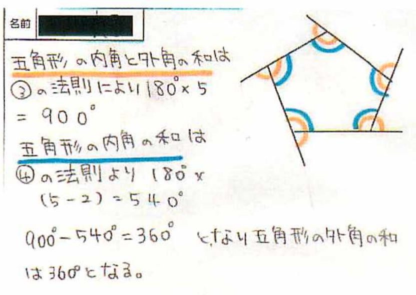


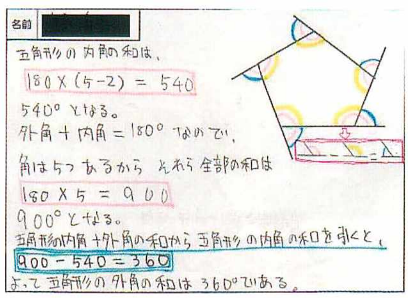


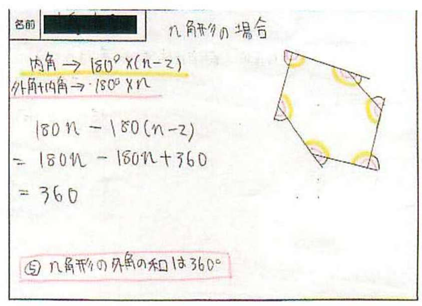




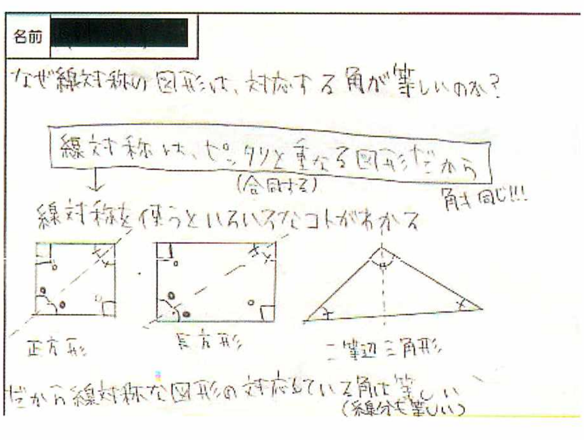
色を効果的に使って外角の和が３６０°になることを説明したレポート

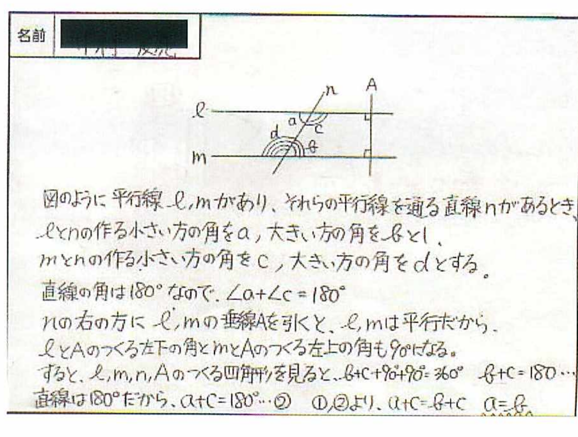






自分なりのことばで説明を試みたレポート（左）と，数学的な記号を使って説明をしたレポート（右）





【資料３】異学年交流授業の指導案

３年１組　１年２組　数学科　学習指導案

平成１８年５月９日（火）
第５限　柏樹ホール
指導者　Ｔ１：戸水　吉信
　　　　Ｔ２：浜口　国彦

１．単元名　３年「平方根」　１年「正負の数」

２．目　標
・正の数の平方根について理解し，それを用いることができる。（３年）
・正の数の平方根の必要性に気付き，平方根の性質を調べることができる。（３年）
・正の数の平方根の計算の意味を理解し，簡単な計算をすることができる。（３年）
・正の数と負の数について，具体的な活動を通して理解し，その四則計算ができる。（１年）
・正の数，負の数の必要性に気付き，正の数，負の数の性質や関係を調べることができる。（１年）
・正の数，負の数の四則計算の意味を理解し，簡単な計算をすることができる。（１年）

３．評価の観点及び規準（本時に関係ある部分を，３年分の早見表から抜粋。詳しくは別紙の評価規準表と３年分の早見表を参照。）

①数学的への関心・意欲・態度
具体的な事象の中から，正負の数や√のついた数を見つけだし，それに興味を持ってその定義や性質，大小を調べようとする
②数学的な見方や考え方
正負の数や√のついた数の定義や性質，大小を，具体的な事象にてらして考察することができる

４．指導にあたって
【教材観】
数学科では，「発達段階に応じた数学における自己表現力の育成」を今年度の研究主題として，自分の考えを数学的な表現で分かりやすく人に伝える力の育成を目指し，各学年の発達段階に応じた表現力の目標をたてて，自分の考えを発表する場を設けながら指導にあたっている。
さて，「数と式」領域においては，１学年の最初に「正負の数」を扱い，３学年の最初に「平方根」を扱う。これらの単元においては，「負の数」「√のついた数」といった，それぞれ新しい数の概念を導入する。扱う数の概念の難易度に差はあっても，日常生活の中で実際に使われている数を数学的にとらえ，数学的な定義やきちんとした計算法則を与えていくという面では，この両単元は非常に似ている。そこで，「既知の概念では表現できない数」を，持っている抽象的概念が違う３年生と１年生がそれぞれどうとらえるか，それをお互いに説明しあう中から学ぶことがあるのではないか，そう考えて，３年生と１年生の異学年交流を進めていくこととした。扱う題材は３学年の「平方根」を扱うこととした。
３年生は，１年生に分かる言葉で説明する中で，”未知の数を既知のことに帰着させて一般的にとらえていく力”をつけて欲しいと考えた。それが自分の考えを数学的な表現で分かりやすく人に伝える力につながっていくと考えた。また，１年生にとっては，一般的・抽象的な思考力のもとになる”未知の数を具体的な量感でとらえる力”をつけて欲しいと考えた。
１年生にとっては負の数の学習で，例えば「－３点」が，「１００点満点中の９７点である」といった量感が必要であり，このように形式的な数を具体的にとらえる力が，抽象的・一般的な思考に結びついていく上では重要であると考えた。また，**３年生の説明を聞いて，自分なりの言葉で説明する経験をふまえ，自分の考えを数学的な表現で人に伝えていく態度の育成を目指した。**
【生徒観】
以下は本校数学科で考えてみた生徒の思考水準（発達段階）である。**３年生は第２水準に到達できている生徒が多く，第３水準への移行を目指していく段階である。**そのためにも，”定義”を数学的に理解し，数の場合分けをすることが必要不可欠となってくる。この授業で数を既知のことがらに帰着させて数学的に定義していく姿勢を身につけさせたい。
また，**１年生は第１水準から第２水準への移行期であり，数を具体的な事象に照らしながら形式的，一般的に扱っていくことが必要とされる。数に形式的概念を与えるためには，具体的な事象との関連づけが必要不可欠な発達段階であり，**この授業でもそれを意識したい。

第１水準　具体的な物を使っての計算から，「数字」での機械的操作による計算ができる。
第２水準　いろいろな法則を見つけ，それを具体的な事象に照らすなどして，一般的に成り立つことが説明できる。
第３水準　いろいろな数の定義を理解し，定義から計算法則などの公式・定理を導き出し，新たな公式・定理の証明ができる。
また，必要に応じて数の場合分けをして，数学的な議論をすすめることができる。

【指導観】
生徒にとっては初めての異学年交流である。１年生が３年生に遠慮せず意見を言える雰囲気を作りたい。そこで，学習は，１年生男女各１名＋３年生男女各１名の計４名を１班として，班で学習する時間を多くとることとした。少人数のグループの中で活発に意見交換してくれることを期待したい。**また，３年生には他人の意見を聞く姿勢を身につけさせたいと考え，事前指導として，道徳や総合学習の時間を利用してブレーンストーミングとＯＳＫを実施した（別途資料参照）。それが他者理解力にもつながると考えた。また，全体の場での意見交流の時間も設けることとした。全体を２つの会場に分け，４０人ずつの交流を行う中で，共に学ぶ環境をつくろうと考えた。**数学的に自分の考えを表現する－他人の意見を聞いて理解する－共に学ぶ場を設定する，というサイクルを大切にしていきたい。

5．指導計画および評価計画（総時数１２時間）

		評価計画
３学年「平方根」（総時数１２時間）		
第１次　平方根	（４時間）	①②③④
第１時　正方形の１辺の長さについて考えよう【本時】		②
第２時　平方根について考えよう		①
第３時　平方根の大小について考えよう		③
第４時　平方根についてまとめよう		④
第２次　根号を含む式の計算（８時間）		①②③④
１学年「正負の数」（総時数２１時間）		
第１次　正の数と負の数	（５時間）	①②③④
第１時　身の回りにある－のついた数を見つけ発表しよう		①
第２時　負の数について考えよう		②
第３時　負の数を数直線に表そう		④
第４時　負の数の大小について考えよう		③
第５時　他にも今までに知らなかった数について考えよう【本時】		②
第２次　正の数と負の数の計算	（１６時間）	①②③④

6．本時の学習（３学年　第１次中第１時　１学年　第１次中第５時）

（１）題材名　　正方形の１辺の長さを考えよう

（２）本時のねらい

・未知の数を既知のことに帰着させて一般的にとらえていく力をつける（３年）

・未知の数を具体的な量感でとらえる力をつける（１年）

（３）評価の観点および規準（別紙の評価規準表を参照）

②数学的な見方や考え方

正負の数や√のついた数の定義や性質，大小を，具体的な事象にてらして考察することができる

（４）「自己表現力の育成」「他者理解力の育成」「共に学ぶ」に関する学習活動について

自分の考えを自分なりの表現で班の中で伝えていく活動。自己表現力と他者理解力の育成を目指している。また，全体発表会で，共に学ぶ環境を設定した。

（５）本時の展開

時間 学習形態	学習活動	予想される生徒の反応（☆）および 指導上の留意点（※）・評価（◆）・支援（◎）
３分	＜課題０＞ 面積が４，９の正方形をつくってみよう。	３年生が１年生に教える形で，みんなそれぞれできていることを確認する。
＜課題１＞ 面積が２の正方形をつくってみよう。		
班活動 ７分 全体発表 ３分	・方眼紙を使って考える。 ・代表の班に解答を書いてもらい，なぜ正方形になっているのか簡単に説明してもらう ・何か意見や付け足しがあったら言ってもらう	※ヒントカード（「斜め」）を用意しておく。分からない班には１枚配布。 ※３年生は，できるだけ１年生に発表させるようにうながす。 ※自分の班の１年生が発表で困ったら３年生が補足をするようにいう。
＜課題２＞ 面積が２の正方形の１辺の長さはどうなっているか，考えてみよう。		
２分 班活動 15分	・面積４，９の正方形の１辺の長さについても簡単に確認する。 ・自分の言葉で，いろいろ考えてみる ・√という知識を使わずに，どう考えたらよいか話し合う。 ・１年生が中心に発表するように３年生は班学習をすすめる ・各班は，自分の班の考えをＡ３用紙に書き，発表会場のガラス窓に掲示する。	☆実際に測ったら１．４cmだったよ ☆１．４は２回かけても２にならないから，もう少し大きい数なのでは？ ☆そんな数ないんじゃない？ ◆新しい数の定義を具体的な事象にてらして考察することができる（基準は評価規準表参照） ◎電卓や定規を使ってみるように支援する。 ◎どのくらいの「大きさ」だろうか，と投げかける。
全体発表 （2箇所） 10分 全体学習 10分	・発表会場を２つに分け，Ｔ１，Ｔ２がそれぞれつく。発表会場のガラス窓に，自分の班の考え方を貼る ・その上でいくつかの班に発表してもらう ・各班の考え方はワークシートにまとめて，あとでクラスで見られるようにする ・最後に全体で今日の学習をふり返る。 ・どのくらいの大きさなのか，また，同じ数を２回かけて２になる数とまとめる ・小数で表しきれるか聞いてみる。時間があれば，そのような数が今までにあったか，１年生に聞いてみる。	※３年生は，１年生にも分かるような言葉で話し合うようにいう。 ※３年生は，できるだけ１年生に発表させるようにうながす。 ※自分の班の１年生が発表で困ったら３年生が補足をするようにいう。 ※定義と量感について意識してまとめる。 ☆円周率とい同じような数だ！ ※上記のような反応が出れば十分である。

3学年　単元評価規準表　**太字は本時の関連項目です**

（単元　平方根）総時数１２時限（４月～５月）

	指導計画および予定時数	主な学習活動または学習項目	数学への関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な表現・処理	数量，図形などについての知識・理解
指導計画・評価規準	①平方根 （５時限）	**・色々な面積の正方形をかいてその１辺の長さについて考えよう。** ・√のついた数を数直線上に表し，その性質について考えよう。	・数を簡潔・明瞭に表現するために，平方根を用いようとする。 ・平方根を用いて考えることのよさに関心をもち，平方根を用いて表したり，平方根の意味を考えようとしたりする。	**・実生活の具体的な場面で，数の平方根を用いて考察することができる。** ・平方根のおよその値を逐次近似的に考察することができる。	・実生活の具体的な場面での数量を√を用いて表現することができる。 ・数の平方根を数直線上に表したり，大小関係を不等号を用いて表すことができる。	・実生活での具体的な場面を通して，平方根の必要性を理解している。 ・平方根および記号√の意味を理解している。
	②根号を含む式の計算 （７時限）	・√のついた数の四則計算の方法を考え，計算の練習をしよう。	・数の平方根の四則に関心をもち，それらの計算をしようとする。	・平方根の計算を文字式の計算と同じようにみて，計算の方法を考察することができる。	・平方根の四則計算ができる。	・平方根の四則の意味とその計算の仕方を理解している。

1学年　単元評価規準表　**太字は本時の関連項目です**

（単元　正負の数）総時数２０時限（４月～５月）

	指導計画および予定時数	主な学習活動または学習項目	数学への関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な表現・処理	数量，図形などについての知識・理解
指導計画・評価規準	①正の数と負の数 （４時限）	・日常生活の中の正の数・負の数 **・正の数，負の数の使われ方や必要性，よさ**	・観察，操作や実験を通して，身の回りのいろいろな事象を正の数・負の数を用いてとらえようとする。 ・反対の方向や性質を表す数として正の数・負の数を用いようとする。	・数を正の数・負の数にまで拡張することで，最高気温の前日との差などを，正の数・負の数を用いて考えることができる。 **・反対の方向や性質を表す場面で，正の数・負の数を用いて考えることができる。**	・正の数・負の数を用いて，身の回りのいろいろな事象を表すことができる。 ・正の数・負の数を用いて反対の方向や性質を表すことができる。 ・正の数・負の数を数直線上に表したり，大小関係を不等号を用いて表したりすることができる。	・正の数・負の数の意味を，これまでの経験や日常生活の具体的な場面などに結びつけて理解している。 ・符号（＋，－）や自然数，整数の意味を理解している。 ・正の数・負の数の大小関係，不等号や絶対値の意味を理解している。
	②正の数・負の数の計算 （１６時限）	・正負の数の加法・減法・乗法・除法・四則混合計算 ・正負の数の利用	・正の数・負の数の四則に関心をもち，計算しようとする。 ・正の数・負の数を用いると減法がいつでも可能になること，減法と加法を統一的に表すことができることなどに関心をもち，問題の解決に活用しようとする。	・これまでの計算をもとにして，正の数・負の数の計算の方法を考えることができる。 ・数を正の数・負の数にまで拡張することで，計算の可能性が拡がることに気づき，加法と減法を統一的にみることができる。	・正の数・負の数の四則計算ができる。 ・加法と減法の混じった式を，正の項や負の項の和として表すことができる。	・正の数・負の数についても，加法，乗法に関して交換，結合や分配法則が成り立つことを理解している。 ・数を正の数・負の数にまで拡張することによって，加法と減法を統一的にみることができることを理解している。

評価方法とＡＢＣの基準

観点	数学への関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な表現・処理	数量，図形などについての知識・理解
評価規準	数学的な事象に関心をもつとともに，数学的活動の楽しさ，数学的な見方や考え方のよさを知り，それらを事象の考察に進んで活用しようとする。	数学的活動を通して，数学的な見方や考え方を身に付け，事象を数学的にとらえ，論理的に考えるとともに，思考の過程を振り返り考えを深める。	事象を数量，図形などで数学的に表現し処理する仕方や推論の方法を身に付けている。	数量，図形などに関する基礎的な概念や原理・法則などについて理解し，知識を身に付けている。
評価の方法と基準	①ノート，レポート点検 より深い追求が見られればＡ 提出して書いてあればＢ 提出がなければＣ 個人面接で提出を促す ②授業中の観察 より深い追求をしていればＡ 意欲が見られなければＣ 机間巡視で課題への取り組みを促す	①単元テスト（分野によって） 発展的な問題が解ければＡ 基本的な問題が解ければＢ 基本的な問題が解けなければＣ 再テストをしたり・課題を課したりする ③ノート，レポート点検 優れた考え方が見られればＡ ④テスト形式レポート 深い洞察が見られればＡ ⑤授業中の観察 優れた考え方を発表したらＡ	①単元テスト 概念的・抽象的な問題が解ければＡ 基本的な問題が解ければＢ 基本的な問題が解けなければＣ 再テストをしたり・課題を課したりする	①単元テスト 概念的・抽象的な問題が解ければＡ 基本的な問題が解ければＢ 基本的な問題が解けなければＣ 再テストをしたり・課題を課したりする

本時の評価の観点および規準と，各学年の到達目標

＜数学的な見方・考え方＞　正負の数や√のついた数の定義や性質，大小を，具体的な事象にてらして考察することができる。

	Ａ（十分満足できる思考水準）	Ｂ（おおむね満足できる思考水準）	評価のポイント
３年	２乗して２になる数は 今までの数とは違って 小数や分数ではきっちり表せないぞ	２乗して２になる数であって， １．４と１．５の間にあって，何か新しい表し方をしなければならない数では？	未知の数を既知のことに帰着させて一般的にとらえていく力
１年	円周率みたいに，小数が どこまでも続く数なのでは	１．４と１．５の間にある 数なのではないか	未知の数を具体的な量感でとらえる力 （負の数の学習にも必要）